Analyse dimensionnelle

Notion de dimension

- La connaissance de la dimension d'une grandeur G renseigne sur sa nature physique.
  La dimension de la grandeur G se note [G].
  Exemple: si G est une masse, alors [G] = M, elle a la dimension d'une masse; on dit aussi qu'elle est homogène à une masse.
- La relation [G] = M correspond à **l'équation aux dimensions** de la grandeur G.
- Pour écrire l'équation aux dimensions de la grandeur G, aucun choix de système d'unités n'est imposé.
  Exemple: une distance d a la dimension d'une longueur: [d] = L ; mais elle peut s'exprimer en mètres, en pouces, etc
- Lorsque dans l'écriture de l'équation aux dimensions d'une grandeur G, on obtient [G] =1, la grandeur est dite sans dimension ou de dimension 1.
  Dans le cas d'un angle, on obtient 1 mais il y a quand une unité, le radian.
- Une équation est dite homogène si ses deux membres ont la même dimension

Règles sur les équations aux dimensions

Grandeur	Dimension associée	Unité SI
Longueur	L	mètre (m)
Masse	M	kilogramme (kg)
Temps	T	seconde (s)
Intensité du courant électrique	I	ampère (A)
Intensité lumineuse	J	candela (Cd)
Température	θ	kelvin (K)
Quantité de matière	N	mole (mol)
Les 7 grandeurs fondamentales du Système international d'unités.		

- On ne peut additionner que des termes ayant la même dimension
- La dimension du produit de deux grandeurs est le produit des dimensions de chacune des grandeurs: [AB] = [A][B]
- La dimension de A^n est égale à $[A]^n$ où n est un nombre sans dimension.
- Pour les fonctions suivantes: sin(u), cos(u), tan(u), ln(u), log(u) et e^u , la grandeur u est sans dimension.
- L'équation aux dimensions de toute grandeur G peut se mettre sous la forme:
  $[G] = L^aM^bT^cI^dJ^e\theta^fN^g$

Utilisations de l'analyse dimensionnelle

- Vérification de l'homogénéité d'une formule

Lors de l'établissement d'une expression, l'analyse dimensionnelle permet de vérifier son homogénéité et de la corriger le cas échéant, sachant qu'une expression non homogène ne peut être que fausse. Pour obtenir l'équation aux dimensions de chaque grandeur présente dans l'expression, on utilise des relations dites « passerelles» entre les grandeurs mises en jeu. Ces relations sont obtenues à partir de formules établies en cours.
Exemple: vérification de l'homogénéité de l'expression de la période d'un pendule simple :
$T_0 = 2\pi \sqrt{(l / g)}$
L'expression est « dimensionnellement juste» si : $[To] = [\sqrt{(l / g)}]$
La dimension du premier terme de l'égalité est [To] = T.
L'équation aux dimensions du second terme peut s'écrire :
$[\sqrt{(l / g)}] = [\sqrt{l}] / [\sqrt{g}] = [l]^{1/2} [g]^{-1/2}$ avec $[l]^{1/2} = L^{1/2}$

Sachant que $\Sigma \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}$, si $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} = m.\vec{g}$ alors [P] = [m][g] = [m][a]
soit [g] = [a] = LT^{-2} . En remplaçant [l] et [g] dans l'équation aux dimensions de $[l]^{1/2}$ $[g]^{-1/2}$, on obtient : $L^{1/2}$ $L^{-1/2}$ $(T^{-2})^{-1/2}$ = T
L'expression To = $2 \pi \sqrt{(l / g)}$ est homogène car les deux termes de l'équation ont la même dimension, celle d'un temps.

- Recherche de la forme d'une expression A = f(B, C)

On suppose qu'une grandeur A peut s'exprimer en fonction de deux autres grandeurs B et C : A = f(B, C). Pour déterminer la forme de f, on exprime B et C en fonction des grandeurs fondamentales, puis on recherche les coefficients α et β , tels que $B^{\alpha}C^{\beta}$ et A aient la même dimension.
Exemple: recherche de l'expression de la période propre To d'un dipôle LC, sachant que To est fonction de l'inductance L et de la capacité C. Pour cela, on établit les équations aux dimensions des grandeurs L et C, puis on recherche les valeurs de α et β pour que, le produit $L^{\alpha}C^{\beta}$ ait la dimension d'un temps.
L'énergie emmagasinée par un condensateur de capacité C de charge Q s'exprime par la relation : $E_C = Q^2 /2\ C$ donc $[E_C] = [Q^2]/[C] = [Q]^2 / [C]$ soit $[C] = [Q]^2 / [E_C$
À partir de la relation Q = I.t, on obtient [Q] = [I].[t] = I.T
Pour obtenir l'équation aux dimensions de E_C , on peut utiliser l'expression de l'énergie cinétique d'un solide en translation de masse m, animé d'une vitesse instantanée v:
$E_c = m.v^2 / 2$. D'où $[E_C]\ [m].[v]^2 = M.L^2.T^{-2}$, donc $[E_C] = [E_c] = M.L^2.T^{-2}$
L'équations aux dimensions de C devient : $[C] = [Q]^2 / [E_C] = I^2.T^2 / (M.L^2.T^{-2})$
soit $[C] = M^{-1}.L^{-2}.T^4.I^{-2}$
Pour obtenir l'équation aux dimensions de L, on peut procéder de façon analogue en utilisant l'expression de l'énergie acquise par une bobine d'inductance L, parcourue par un courant d'intensité I
$E_B = L.I^2 / 2$ d'où $[L] = [E_B]/[I]^2 = M.L^2.T^{-2} / I^2$ soit $[L] = M.L^2.T^{-2}.I^{-2}$
On écrit ensuite que le produit $L^{\alpha}C^{\beta}$ doit avoir la dimension d'un temps:
$[L^{\alpha}C^{\beta}] = [L]^{\alpha}[C]^{\beta} = (M.L^2.T^{-2}.I^{-2})^{\alpha} (M^{-1}.L^{-2}.T^4.I^2)^{\beta} = M^{\alpha-\beta}.L^{2\alpha-2\beta}.T^{-2\alpha+4\beta}.I^{-2\alpha+2\beta} = T$
Pour que l'égalité précédente soit vérifiée, il faut que :
$\alpha - \beta = 0$; $2\alpha - 2\beta = 0$; $-2\alpha + 4\beta = 1$ et $-2\alpha + 2\beta = 0$
D'où $\alpha = \beta = 1/2$
La période propre T_0 d'un dipôle LC peut donc s'exprimer en fonction de L et de C :
$T_0 = k\ L^{\alpha}C^{\beta}$ avec $\alpha = \beta = 1/2$ soit $T_0 = k\ L^{1/2}.C^{1/2} = k\sqrt{LC}$