Term S – Chap 05 : Cinématique et dynamique Newtoniennes

I) Comment décrire le mouvement ?

On étudie ici des systèmes dont les dimensions sont faibles par rapport à leurs déplacements et on les considère comme ponctuels, on les représente par un point correspondant au centre de gravité.

1) Le référentiel

C'est le lieu d'étude, on choisit un objet qui sert de référence pour décrire le mouvement.
Il est indispensable de préciser le référentiel choisi avant de décrire le mouvement.
On utilise les référentiels terrestre (lié à la Terre) pour une étude d'objet au voisinage de la Terre ou en laboratoire, le référentiel géocentrique (lié au centre de la Terre) pour un objet tournant autour de la Terre, ou héliocentrique (lié au centre du Soleil) pour les planètes du système solaire.

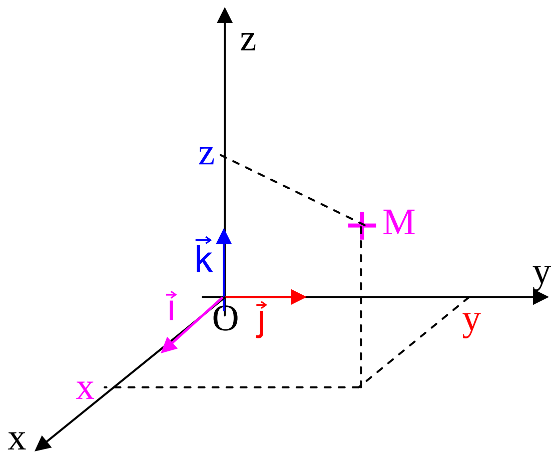
Ces trois référentiels sont considérés comme galiléen dans notre domaine d'étude.
Un référentiel dans lesquels les lois de Newton sont vérifiées, est galiléen.

Remarque : Un référentiel qui tourne, ralentit ou accélère par rapport à un référentiel galiléen n'est pas galiléen. Les référentiels terrestre et géocentrique sont donc utilisés dans un temps limité pour leur rotation soit négligée. Un référentiel en mouvement rectiligne et uniforme par rapport au référentiel héliocentrique est galiléen.

2) Le vecteur position

On note M le point mobile étudié. Sa position dans l'espace est définie dans un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$.
Lorsque le point M est en mouvement,
ses coordonnées x, y et z sont des fonctions du temps :

$\overrightarrow{OM} = x(t) . \vec{i} + y(t) . \vec{j} + z(t) . \vec{k}$

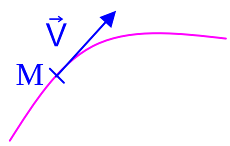


Parfois , on simplifie les notations en écrivant x, y et z sans indiquer qu'ils dépendent du temps.

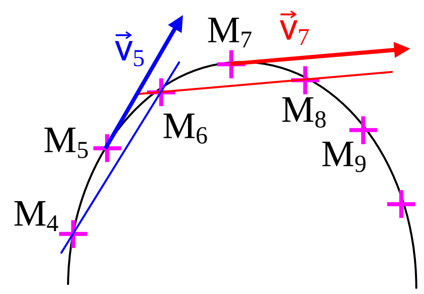
Certains mouvements pourront être étudiés dans un plan en n'utilisant que deux coordonnées :
$\overrightarrow{OM} = x(t) . \vec{i} + y(t) . \vec{j}$ et d'autres sur une droite (mouvement rectiligne) : $\overrightarrow{OM} = x(t) . \vec{i}$

3) Le vecteur vitesse

Il caractérise la variation du vecteur position en fonction du temps.



A un instant t_i , le vecteur vitesse $\vec{v}_i$ est défini par :
$\vec{v}_i = (\overrightarrow{OM}_{i+1} - \overrightarrow{OM}_{i-1}) / (t_{i+1} – t_{i-1}) = \Delta\overrightarrow{OM} / \Delta t$
Il est caractérisé par sa direction, la tangente à la trajectoire au point $M(t_i)$, par son sens (celui du mouvement) et sa valeur ou norme v, exprimée en $m.s^{-1}$.



Sur un enregistrement donnant les différentes positions du mobile M, on peut tracer les vecteurs vitesse en différents points.
$\vec{v}_7 = M_6M_8 / (t_8 – t_6)$ On choisit une échelle pour le représenter (exemple : 1 cm $\leftrightarrow$ 2 $m.s^{-1}$)

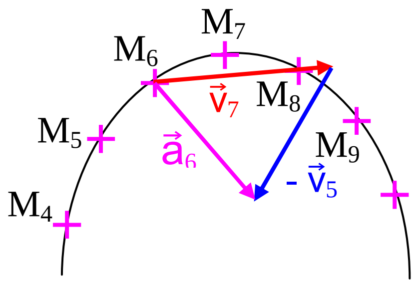
On définit aussi le vecteur vitesse comme la dérivée du vecteur position par rapport au temps:

$$\vec{v}(t) = d\overrightarrow{OM} / dt = v_x \, . \, \vec{\imath} + v_y \, . \, \vec{\jmath} + v_z \, . \, \vec{k} = (dx/dt) \, . \, \vec{\imath} + (dy/dt) \, . \, \vec{\jmath} + (dz/dt) \, . \, \vec{k}$$

$$v(t) = \sqrt{(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}$$

<u>Important :</u> la notation df / dt équivaut à f ’(t) , **dérivée** de f par rapport au temps.
En mathématique, on note toujours f ’ sans préciser que l’on dérive par rapport à x.
En physique, on dérive par rapport à différentes grandeurs, le temps t, la distance x, le volume V…, il faut donc préciser.

4) Le vecteur accélération
Le vecteur accélération caractérise les variations du vecteur vitesse.



A un instant t_i , le vecteur accélération $\vec{a}_i$ est défini par :
$\vec{a}_i = (\vec{v}_{i+1} - \vec{v}_{i-1}) / (t_{i+1} – t_{i-1}) = \Delta\vec{v}_i / \Delta t$
Il est caractérisé par la direction et le sens de $\Delta\vec{v}_i$ et sa valeur ou norme a_i , exprimée en $m.s^{-2}$. $a_i = | \Delta\vec{v}_i | / (t_{i+1} – t_{i-1})$
Attention : norme $| \Delta\vec{v}_i | \neq v_{i+1} - v_{i-1}$ (sauf trajectoire rectiligne)

Sur l’enregistrement, on peut tracer le vecteur accélération .
$\vec{a}_6 = (\vec{v}_7 - \vec{v}_5) / (t_7 – t_5)$ On choisit une échelle pour le représenter (ex : 1 cm ↔ 0,5 $m.s^{-2}$)

Point mathématique : $f''(t) = d(df/dt) / dt = d^2f / dt^2$

On définit aussi le vecteur accélération comme la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps:

$$\vec{a}(t) = d\vec{v} / dt = a_x \, . \, \vec{\imath} + a_y \, . \, \vec{\jmath} + a_z \, . \, \vec{k} = (dv_x/dt) \, . \, \vec{\imath} + (dv_y/dt) \, . \, \vec{\jmath} + (dv_z/dt) \, . \, \vec{k}$$

$$= (d^2x/dt^2) \, . \, \vec{\imath} + (d^2y/dt^2) . \, \vec{\jmath} + (d^2z/dt^2) \, . \, \vec{k}$$

$$a(t) = \sqrt{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)}$$

Le vecteur accélération s'exprime en $m.s^{-2}$; il est toujours dirigé vers l'intérieur de la trajectoire.

5) Le vecteur quantité de mouvement
La quantité de mouvement d'un objet est égale au produit de sa masse m par son vecteur vitesse
$\vec{p} = m \times \vec{v}$ (m : masse en kg , $\vec{v}$: vecteur vitesse (v en $m.s^{-1}$) ; p en $kg.m.s^{-1}$)

II) Notions mathématiques : Dérivée et primitive d’une fonction :

Dérivée : $f_1(x) = a \, . \, x^2$; $f_1'(x) = 2 \, a \, . \, x$ (rappel : $f_1'(x) = df_1 / dx$)
$f_2(x) = b \, . \, x$; $f_2'(x) = b$; $f_3(x) = c$ (constante) ; $f_3'(x) = 0$

Notion de primitive : Si on considère g(x) = f ’(x) = df/dx alors f(x) est appelée primitive de g(x).

Exemple 1 : g(x) = f ’(x) = b ; primitive de g(x) = f(x) = b . x + constante = b . x + c
Pour vérifier, on dérive le résultat : f ’(x) = d(b.x + c)/dx = b + 0 = b = g(x)

Exemple 2 : g(x) = f ’(x) = a . x ; primitive de g(x) = f (x) = a . x^2 / 2 + constante = a . x^2 / 2 + c
Pour vérifier, on dérive le résultat: f ’(x) = d(a.x^2 / 2 + c)/dx = 2 a . x / 2 + 0 = a . x = g(x)

Exemple 3 : g(x) = f ’(x) = 0 ; primitive de g(x) = f (x) = constante = c
Pour vérifier, on dérive le résultat: f ’(x) = d(constante)/dx = 0 = g(x)

III) Les différents types de mouvements

L'ensemble des positions successives d'un mobile s'appelle la trajectoire.

1) Mouvement rectiligne et uniforme

Le mouvement est dit rectiligne et uniforme si la trajectoire est une droite et la vitesse constante (ou si le vecteur vitesse $\vec{v}$ est constant (même direction, même sens et même norme))

$\vec{v} = \overrightarrow{constante}$; $\vec{a} = d\vec{v}/dt = \vec{0}$

On utilise un seul repère (O, $\vec{i}$) correspondant à la trajectoire avec une seule coordonnée x.

$a_x = 0 = dv_x/dt$

Pour trouver v_x, on cherche la primitive, fonction dont la dérivée par rapport à t est nulle.

v_x est donc une constante par rapport au temps. v_x = constante = v_0 (vitesse initiale) = dx/dt

La constante est déterminée à t = 0 s. (vérification : $dv_x/dt = 0$)

Pour trouver x , on cherche la primitive, fonction dont la dérivée par rapport à t est constante, v_0.

$dx/dt = v_0$; $x = v_0 \times t + \text{constante} = v_0 \times t + c$ A t = 0s, $x = 0 + c = x_0$

$x = v_0 \times t + x_0$ (vérification : $dx/dt = v_0 + 0 = v_0$)

$x = v_0 \times t + x_0$; $v_x = v_0$; $a_x = 0$ équations horaires du mouvement

2) Mouvement rectiligne uniformément varié

Il s'agit d'un mouvement rectiligne à accélération constante. Dans ce cas, le vecteur accélération est constant : il conserve la même direction, le même sens et la même valeur au cours du temps.

$\vec{a}(t) = \vec{a}_0$; $a_x = a_0 = dv_x/dt$

Pour trouver v_x, on cherche la primitive, fonction dont la dérivée par rapport à t est constante.

$v_x = a_0 \times t + c$. On détermine c à t = 0s : $v_x = 0 + c = v_0$

$v_x = a_0 \times t + v_0$ (vérification : $dv_x/dt = a_0 + 0 = a_0$)

Pour trouver x , on cherche la primitive, fonction dont la dérivée par rapport à t est $a_0 \times t + v_0$

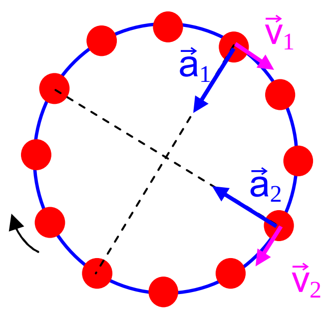
$dx/dt = a_0 \times t + v_0$; $x = a_0 \times t^2/2 + v_0 \times t + c$ A t = 0s, $x = 0 + 0 + c = x_0$

$x = a_0 \times t^2/2 + v_0 \times t + x_0$ (vérification : $dx/dt = 2\, a_0 \times t / 2 + v_0 + 0 = a_0 \times t + v_0$)

$x = a_0 \times t^2/2 + v_0 \times t + x_0$; $v_x = a_0 \times t + v_0$; $a_x = a_0$ équations horaires du mouvement

Le mouvement est accéléré si $\vec{a}$ et $\vec{v}$ sont de même sens et ralenti s'ils sont en sens inverses.

3) Mouvement circulaire et uniforme

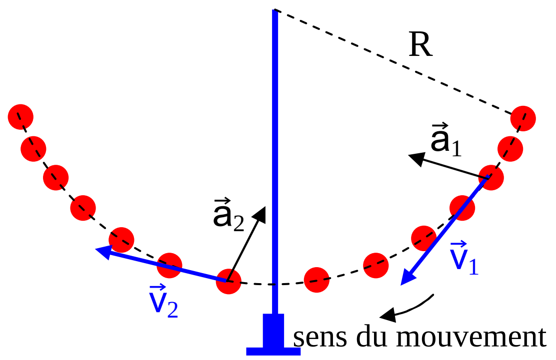


La trajectoire est un cercle et la vitesse est constante. En revanche, la direction du vecteur vitesse change au cours du temps (tangente à la trajectoire), donc le vecteur vitesse n'est pas constant, l'accélération n'est pas nulle. Elle est dirigée vers le centre du cercle (elle est centripète).

$a = v^2 / R$ (R : rayon de la trajectoire en m ; v : vitesse en $m.s^{-1}$)

Période de révolution (durée d'un tour) : $v = P / T = 2\pi \times r / T$; $T = 2\pi \times r / v$

4) Mouvement circulaire non uniforme



Dans ce cas l'accélération n'est pas constante mais la trajectoire reste un cercle de rayon R.

A chaque instant, le vecteur accélération est la somme de deux termes: la composante tangentielle $\vec{a}_T$ et d'une composante normale $\vec{a}_N$. (Repère de Frenet : $\vec{N}$ et $\vec{T}$)

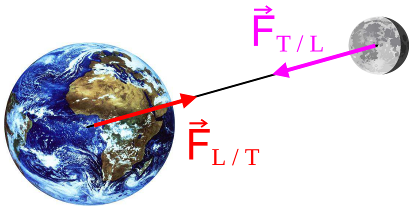
$\vec{a} = a_N \times \vec{N} + a_T \times \vec{T}$; $a_N = v^2 / R$; $a_T = dv/dt$

III) Les lois de Newton

1) Première loi de Newton ou principe d'inertie
Lorsque les forces qui s'exercent sur un solide se compensent , son centre d'inertie est soit au repos, soit animé d'un mouvement rectiligne et uniforme dans un référentiel galiléen.
Réciproquement, si le centre d'inertie d'un solide est au repos ou animé d'un mouvement rectiligne et uniforme dans un référentiel galiléen, alors les forces qui s'exercent sur lui se compensent.
$\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{0}$, $\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\ldots = \vec{0}$ (le sigle Σ signifie somme en mathématique)
Le système est alors isolé (aucune force) ou pseudo-isolé ($\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{0}$)

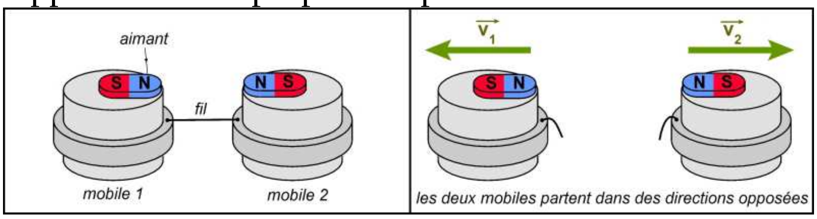
2) Deuxième loi de Newton (relation fondamentale de la dynamique)
Dans un référentiel galiléen, si un système ponctuel est soumis à l'action de différentes forces extérieures dont la somme vectorielle est notée $\Sigma \vec{F}_{ext}$ alors celle ci est égale à la dérivée par rapport au temps de sa quantité de mouvement :
$\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots = d\vec{p}/dt = m\,\vec{a}_G$

3) Troisième loi de Newton (principe des actions réciproques)
Lorsqu'un corps A exerce sur un corps B une action mécanique modélisée par la force $\vec{F}_{A/B}$, alors le corps B exerce sur le corps A une action mécanique modélisée par la force $\vec{F}_{B/A}$.
Ces interactions sont telles que : $\vec{F}_{A/B}$ et $\vec{F}_{B/A}$ ont la même droite d'action. $\vec{F}_{A/B} = - \vec{F}_{B/A}$



4) Loi de conservation de la quantité de mouvement :
Dans un système isolé ou pseudo-isolé, les forces se compensent, le vecteur quantité de mouvement se conserve.

Application à la propulsion par réaction :



Deux mobiles autoporteurs sans vitesse initiale sont liés par un fil. Les aimants fixés sur chacun des mobiles, sont positionnés pour s'opposer. Quand le fil est coupé, les deux aimants se repoussent, et **les mobiles s'éloignent alors l'un de l'autre.**
<u>Avant et juste après</u> la rupture du fil, le système des deux mobiles est pseudo-isolé, le poids et la réaction de la table se compensent, la quantité de mouvement se conserve : $\vec{p} = \vec{p}'$
Avant : $\vec{p}_1 = \vec{p}_2 = \vec{0}$; $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0}$. Après : $\vec{p}' = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = \vec{0}$; $\vec{p}'_1 = - \vec{p}'_2$
Il y a propulsion par réaction.

Autres exemples : fusée au décollage, ballon de baudruche ouvert, recul d'une arme lors d'un tir .

Remarque : Souvent le système étudié n'est isolé qu'autour du démarrage.
La fusée n'est plus isolée lorsqu'elle accélère.