Term S – Chap 06 - Applications des lois de Newton et des lois de Kepler

I) Mouvement d'un projectile dans un champ de pesanteur uniforme :

1) Poids et champ de pesanteur terrestre:

Le poids d'un objet est la force d'attraction gravitationnelle exercée par la Terre.
Cette force est caractérisée par une origine : le centre de gravité G (ou centre d'inertie) du corps, une direction : la verticale passant par G, un sens : vers le bas et
une valeur : $P = m \times g$ avec P en Newton (N), m en kg et g en $N.kg^{-1}$

En un point donné M, au voisinage de la Terre, le poids d'un objet de masse m peut s'écrire :
$\vec{P} = m\vec{g}$ où $\vec{g}$ est le vecteur champ de pesanteur terrestre en tout point.

Ce vecteur champ de pesanteur terrestre se caractérise par une direction : la verticale,
un sens : vers le bas et une valeur : l'intensité g de la pesanteur

2) Chute libre :

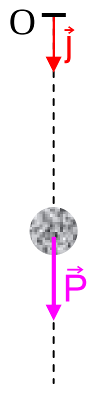
Par définition, un solide est en chute libre s'il n'est soumis qu'à son poids .
On peut étudier la chute dans le vide, elle est parfaitement libre.
Dans l'air, un objet en chute, est soumis à la poussée d'Archimède $\vec{P}_A$ ($P_A = \rho_{air} V g$) et à la force de frottements fluide, exercées par l'air , mais ces forces sont faibles et négligeables par rapport au poids dans certaines conditions : faible hauteur (quelques mètres) et faible vitesse.

3) Chute verticale réelle, sans vitesse initiale :

Une bille métallique de masse m est lâchée à 6,0 m du sol, sans vitesse initiale, d'un point pris comme origine d'un axe vertical (O, $\vec{j}$) orienté vers le bas. ($g = 9{,}80\ N.kg^{-1}$).
L'origine des temps est choisie au point O de départ de la bille.

a) S'agit-il d'une chute libre ? Justifier.
b) Faire un schéma en représentant axe, origine, vecteur unitaire.
   Faire une étude de force(s) exercée(s) sur la balle et les représenter sur le schéma.
c) Déterminer le vecteur accélération $\vec{a}$ et nommer le mouvement.
d) Déterminer les équations horaires du mouvement (a, v et y en fonction du temps)
e) Déterminer l'instant t_1 et la vitesse v_1 où la bille frappe le sol

Réponses :



a) La poussée d'Archimède P_A dans l'air est négligeable par rapport au poids P de la bille. La vitesse de la bille et la hauteur de chute sont faibles, la force de frottement fluide exercée par l'air sur la bille est donc négligeable par rapport au poids.
Le poids est donc la seule force exercée sur la bille. La chute est donc libre.

b) Lors d'une étude, il faut définir le système étudié et le référentiel d'étude.
On étudie la bille (système) dans le référentiel terrestre galiléen, auquel on associe le repère (O, $\vec{j}$). $\vec{j}$ vertical vers le bas. (On peut le choisir vers le haut)
Force : poids $\vec{P}$ vertical vers le bas , $P = m \cdot g$

c) On applique le deuxième loi de Newton à la balle dans le référentiel terrestre galiléen :
$\vec{P} = m \times \vec{a}$; $m \times \vec{g} = m \times \vec{a}$: $\Rightarrow$ $\vec{a} = \vec{g}$ $\vec{a}$ est constant
Dans ce cas, le mouvement est rectiligne vertical uniformément accéléré.

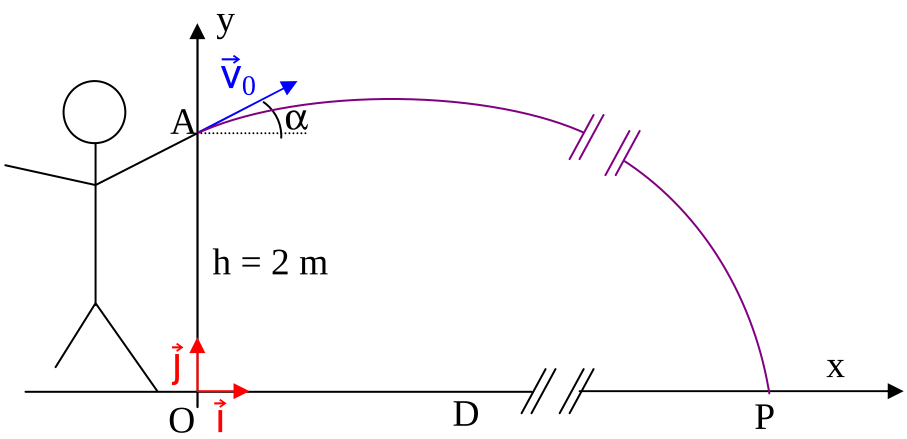
d) $a = a_y = g$; $a_y = dv_y/dt$ $\Rightarrow$ $dv_y/dt = g$
On cherche la primitive qui admet g comme dérivée : $v = v_y = g \times t + k_1$ (k_1 étant une constante)
Pour déterminer la constante k_1 , on utilise les conditions initiales : à t = 0s, $v = k_1 = v_0 = 0$ m.s^{-1}
$v = g \times t$, $v_y = dy/dt = g \times t$

On cherche la primitive qui admet $g \times t$ comme dérivée est : $y = ½\, g \times t^2 + k_2$ (k_2 constante)
A t = 0s, $y = k_2 = y_0 = 0$ m $\Rightarrow$ $y = ½\, g \times t^2$
Equations horaires du mouvement : $\boldsymbol{y = ½\, g \times t^2}$ $\boldsymbol{v = g \times t}$ **et** $\boldsymbol{a = g}$

e) Soit A le point du sol à la verticale de O, $y_A = 6{,}0$ m. $y_A = ½\, g \times t_1^2$; $t_1^2 = 2\, y_A / g$
$t_1 = \sqrt{(2\, y_A / g)} = \sqrt{(2 \times 6{,}0 / 9{,}80)} = 1{,}1$ s (2 chiffres significatifs en accord avec les données)
Calcul de v_1 : $v_1 = g \times t_1$, $v_1 = 9{,}80 \times 1{,}1 = 11$ m.s^{-1}
Dans d'autres exercices, v_0 et y_0 peuvent être non nulles, les constantes k_1 et k_2 interviennent alors.

4) Lancer d'un projectile :

Le lancer de poids semble être l'application idéale des lois de la balistique. Le but est surtout de lancer le "poids" le plus loin possible. Ici, la poussée de l'athlète reste prépondérante et on constate que l'angle de tir est effectivement proche de 45°. Pour éviter de confondre avec la force, le "poids" sera nommé boule. On étudie le mouvement de la boule dans le repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$), l'origine O étant le point du sol situé à la verticale du centre d'inertie du poids à la date t = 0s.
Données : pour $\alpha = 45°$, $\sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha = 0{,}5$ et $\tan \alpha = 1$; $18^2 = 324$
Tous les calculs sont à réaliser SANS CALCULATRICE !!!



Données : si $\alpha = 45°$, $\sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha = 0{,}5$ et $\tan \alpha = 1$; $18^2 = 324$, g = 10 N.kg-1 , $\sqrt{1{,}8} \approx 1{,}3$
a) Définir le système et choisir un référentiel. La boule est-elle en chute libre ?
b) Calculer, à t = 0 s, les cordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OA}$ et du vecteur vitesse $\vec{v}_0$ dans le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) sous forme littérale.
c) Etablir sous forme littérale les équations horaires du mouvement du centre d'inertie M du "poids" dans le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$). Montrer que le mouvement est plan.
d) En déduire l'équation littérale de la trajectoire (y = f(x)) et préciser sa nature.
e) En déduire que, pour $\alpha = 45°$, le carré de la vitesse initiale peut se mettre sous la forme littérale $v_0^2 = g \times D^2 / (D+h)$, D étant la distance mesurée au sol pour ce lancer.
f) Calculer l'énergie cinétique initiale du "poids" de masse 4,0 kg ainsi lancé dans une compétition féminine, la performance étant réalisée pour un lancer D égal à 18 m et $\alpha = 45°$.
g) Pour un autre lancer d'un athlète jeune, on mesure la vitesse initiale à 10 m.s^{-1} et $\alpha = 45°$. Déterminer la distance D réalisée.

Solution :

a) Le système est la boule. On choisit le référentiel terrestre.
Il est en chute libre, il s'est soumis qu'à son poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$. Les forces exercées par l'air (poussée d'Archimède et force de frottement fluide) sont négligeables par rapport au poids $\vec{P}$.

b) Conditions initiales.

$\overrightarrow{OA}$: $x_0 = 0$; $y_0 = OA = h = 2$ m ; $z_0 = 0$

$\vec{v}_0$: $v_{0x} = v_0 \times \cos\alpha$; $v_{0y} = v_0 \times \sin\alpha$; $v_{0z} = 0$

c) Equations horaires du mouvement.
On applique la deuxième loi de Newton dans un référentiel terrestre : $m\,\vec{g} = m\,\vec{a}$
L'accélération est donc : $\vec{a} = \vec{g}$
Les coordonnées du vecteur accélération sont donc :

$\vec{a}$: $a_x = dv_x / dt = 0$; $a_y = dv_y / dt = -g$; $a_z = dv_z / dt = 0$ primitives $\Rightarrow$ $\vec{v}$: $v_x = k_1$; $v_y = -g \times t + k_2$; $v_z = k_3$

k_1, k_2 et k_3 sont des constantes que l'on détermine en utilisant les conditions initiales
$k_1 = v_{x\,0} = v_0 \times \cos\alpha$; $k_2 = v_{y\,0} = v_0 \times \sin\alpha$ et $k_3 = v_{z\,0} = 0$

$\vec{v}$: $v_x = dx / dt = v_0 \times \cos\alpha$; $v_y = dy / dt = -g \times t + v_0 \times \sin\alpha$; $v_z = dz / dt = 0$ primitives $\Rightarrow$ $\overrightarrow{OM}$: $x = v_0 \times \cos\alpha \times t + k_4$; $y = -½\,g \times t^2 + v_0 \times \sin\alpha \times t + k_5$; $z = k_6$

k_4, k_5 et k_6 sont des constantes que l'on détermine en utilisant les conditions initiales
$k_4 = x_0 = 0$; $k_5 = y_0 = h = 2$ m ; $k_6 = z_0 = 0$
z = 0 à tout l'instant, la trajectoire est donc plane. Le mouvement a lieu dans un plan vertical
Les équations horaires du mouvement sont :
$x = v_0 \times \cos\alpha \times t$; $y = -g \times t^2 + v_0 \times \sin\alpha \times t + h$ et $z = 0$

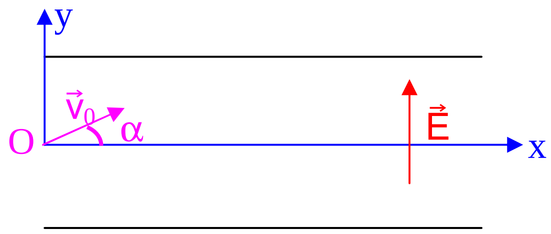
d) $x = v_0 \times \cos\alpha \times t$ $\Rightarrow$ $t = x / (v_0 \times \cos\alpha)$.
$y = -g \times t^2 + v_0 \times \sin\alpha \times t + h = -½\,g \times x^2 / (v_0 \times \cos\alpha)^2 + \tan\alpha \times x + h$
Entre A et B, la trajectoire de la boule est donc un arc de parabole.

e) pour $\alpha = 45°$, $\cos\alpha^2 = 0,5$ et $\tan\alpha = 1$.
L'équation devient donc : $y = -½\,g \times x^2 / 0,5\,v_0^2 + x + h = -g \times x^2 / v_0^2 + x + h$
Si $x_P = D$, $y_P = 0$. On a donc : $0 = -g \times D^2 / v_0^2 + D + h$
$g \times D^2 / v_0^2 = D + h$ $\Rightarrow v_0^2 = g \times D^2 / (D+h)$

f) énergie cinétique initiale du "poids" : $Ec_0 = ½\,m \times v_0^2 = ½\,m \times g \times D^2 / (D+h)$
$Ec_0 = ½ \times 4,0 \times 10 \times 18^2 / (18+2) = 20 \times 324 / 20 = 324$ J

g) $v_0 = 10$ m.s^{-1} , $y_P = 0 = -g \times D^2 / v_0^2 + D + h = -10\,D^2 / 100 + D + 2$
$0 = -0,1\,D^2 + D + 2$, c'est de la forme $0 = a\,x^2 + b\,x + c$
Le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 + 4 \times 0,1 \times 2 = 1,8$; $\sqrt{\Delta} = \sqrt{1,8} \approx 1,3$
Les racines sont : $x_1 = (-b - \sqrt{\Delta}\,) / 2a = (-1 - 1,3) / (-0,1 \times 2) = 23 / 2 = 11,5$ m
$x_2 = (-b + \sqrt{\Delta}\,) / 2a = (-1 + 1,3)/(-0,1 \times 2) = -3/2 = -1,5$ m

II) Mouvement d'une particule dans un champ électrostatique uniforme :



Un électron de masse m, pénètre au point O dans un champ électrostatique uniforme $\vec{E}$ créé par deux armatures parallèles et horizontales de longueur L = 10,0 cm. Il pénètre au milieu des 2 armatures avec une vitesse v_0 de $3{,}00 \times 10^7$ m.s^{-1} faisant un angle α avec l'horizontale.

a) Définir le système et le référentiel.
b) Parmi les forces exercées sur l'électron, peut-on négliger l'une des forces ? Justifier.
c) Etablir les équations horaires du mouvement de l'électron.
d) Etablir l'équation de la trajectoire. Nommer cette trajectoire.
e) Déterminer les coordonnées du point de sortie S de l'électron hors de la zone entre les plaques.

Données : $E = 4{,}43\times10^4$ V.m^{-1} ; $e = 1{,}60\times10^{-19}$ C ; $m = 9{,}11\times10^{-31}$ kg ; $\alpha = 30°$; $g = 9{,}81$ m.s^{-2}

Solution :

a) Le système est l'électron. On choisit le référentiel terrestre galiléen.

b) Les forces exercées sur l'électron sont : la force électrostatique $\vec{F}e = q \times \vec{E} = - e \times \vec{E}$ et le poids $\vec{P} = m \times \vec{g}$. $Fe / P = e \times E / (m \times g) = 1{,}60\times10^{-19} \times 4{,}43\times10^4 / (9{,}11\times10^{-31} \times 9{,}81) = 7{,}9 \times 10^{14}$
On peut donc négliger le poids par rapport à la force électrostatique.

c) On applique la deuxième loi de Newton dans un référentiel terrestre : $- e \times \vec{E} = m \times \vec{a}$

L'accélération est donc : $\vec{a} = - (e / m)\, \vec{E}$

Les coordonnées du vecteur accélération sont donc :

$$\vec{a} \begin{array}{l} a_x = dv_x / dt = 0 \\ a_y = dv_y / dt = - e \times E / m \end{array} \quad \text{primitives} \Rightarrow \quad \vec{v} \begin{array}{l} v_x = k_1 \\ v_y = - e\times E\times t / m + k_2 \end{array}$$

k_1 et k_2 sont des constantes que l'on détermine en utilisant les conditions initiales

$k_1 = v_{x\,0} = v_0 \times \cos\alpha$ et $k_2 = v_{y\,0} = v_0 \times \sin\alpha$

$$\vec{v} \begin{array}{l} v_x = dx / dt = v_0 \times \cos\alpha \\ v_y = dy / dt = - e\times E\times t / m + v_0\times\sin\alpha \end{array} \quad \text{primitives} \Rightarrow \quad \overrightarrow{OM} \begin{array}{l} x = v_0 \times \cos\alpha \times t + k_4 \\ y = - \tfrac{1}{2}\, e\times E\times t^2 / m + v_0\times\sin\alpha\times t + k_5 \end{array}$$

k_4 et k_5 sont des constantes déterminées en utilisant les conditions initiales : $k_4 = x_0 = 0$; $k_5 = y_0 = 0$

Les équations horaires du mouvement sont : $x = v_0\times\cos\alpha\, t$; $y = - \tfrac{1}{2}\, e\times E\times t^2 / m + v_0 \times \sin\alpha \times t$

d) $t = x / (v_0 \times \cos\alpha)$; $y = - \tfrac{1}{2}\, e \times E \times x^2 / (m \times v_0^2 \times \cos^2\alpha) + \tan\alpha \times x$

Cette équation correspond à une trajectoire de parabole.

e) Lorsque l'électron sort, $x_S = L = 10{,}0 \times 10^{-2}$ m.

$y_S = - \tfrac{1}{2}\, e \times E \times x_S^2 / (m \times v_0^2 \times \cos^2\alpha) + \tan\alpha \times x_S$

$y_S = - 1{,}60 \times 10^{-19} \times 4{,}43 \times 10^4 \times (10{,}0 \times 10^{-2})^2 / (2 \times 9{,}11 \times 10^{-31} \times (3{,}00 \times 10^7 \times \cos 30)^2)$
$+ \tan 30 \times 10{,}0 \times 10^{-2} = 1{,}02 \times 10^{-4}$ m

III) Mouvement d'un satellite autour d'une planète :

Titan, le plus gros satellite de Saturne, situé à une distance R de Saturne. L'excentricité orbitale des satellites étant très faible, on supposera leurs trajectoires circulaires.
Saturne (de centre S) et ses satellites sont des corps dont la répartition des masses est à symétrie sphérique. Les rayons des orbites des satellites sont supposés grands devant leur taille.
On considère que la seule force gravitationnelle exercée sur Titan provient de Saturne.

Données : $G = 6{,}67.10^{-11}$ S.I. : constante de gravitation universelle.
$R_T = 1{,}22.10^6$ km (rayon de l'orbite de Titan) ; $R_S = 6{,}0.10^4$ km (rayon de la planète Saturne).
T_S = 10h 39 min (période de rotation de Saturne sur elle-même) ; $M_S = 5{,}69.10^{26}$ kg (masse Saturne)

a) Définir le système et le référentiel d'étude.

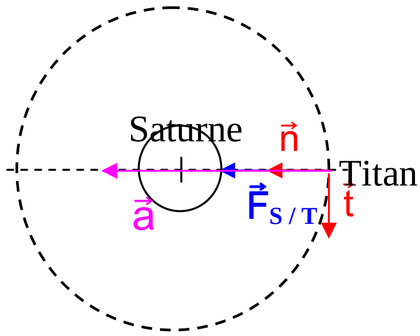
b) Nommer la (les) force(s) extérieure(s) appliquée(s) au satellite Titan, de masse M_T.
c) Schématiser Saturne, Titan, et la(les) force(s) extérieure(s) appliquée(s) sur Titan.
d) Donner l'expression vectorielle de cette(ces) force(s).
e) Exprimer l'accélération vectorielle du centre d'inertie T de Titan en précisant la loi utilisée.
f) Compléter le schéma précédent, avec le repère ($\vec{t}$, $\vec{n}$) et l'accélération $\vec{a}$ de Titan.
g) Donner les expressions littérales des coordonnées de $\vec{a}$ dans le repère de Frenet en fonction de la vitesse v du satellite.
h) Montrer que le mouvement de Titan est uniforme.
i) Retrouver l'expression de la vitesse de Titan orbite autour de Saturne : $v = \sqrt{(G.M_S / R_T)}$

Après le survol de Titan, la sonde Cassini a survolé le satellite Encelade en février 2005.
Dans le référentiel saturno-centrique, le satellite Encelade a un mouvement de révolution circulaire uniforme, dont la période (en jour terrestre), est $T_E = 1{,}37$ et le rayon est R_E.
j) Déterminer une relation liant la période T d'un satellite, sa vitesse v et le rayon R de son orbite.
k) Retrouver la relation suivante : $T^2 / a^3 = 4\,\pi^2 / (G.M_S)$
l) Déterminer la valeur du rayon R_E de l'orbite d'Encelade.

Solution :

a) Le système est Titan et on utilise le référentiel saturno-centrique galiléen, solide formé par le centre de Saturne et les centres de 3 étoiles lointaines .

b) On néglige la force gravitationnelle exercée par le Soleil.
La force extérieure appliquée au satellite Titan est la force gravitationnelle $\vec{F}_{S/T}$ exercée par Saturne dirigée de T vers S.
c) Schéma



d) $\vec{F}_{S/T} = (G.M_S.M_T / R_T^2) . \vec{n}$

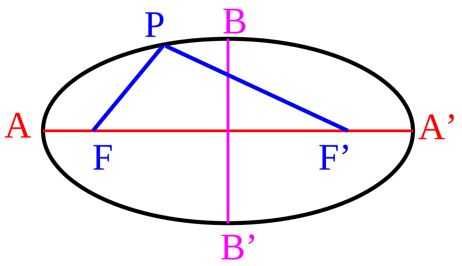
e) On applique la 2ème loi de Newton au satellite Titan dans le référentiel saturno-centrique supposé galiléen. : $\vec{F}_{S/T} = M_T . \vec{a}$
$(G.M_S.M_T / R_T^2) . \vec{n} = M_T . \vec{a}$; $\vec{a} = (G.M_S / R_T^2) . \vec{n}$

f) voir schéma

g) $\vec{a} = a_t . \vec{t} + a_n . \vec{n}$; $a_t = dv/dt$ et $a_n = v^2 / R_T$

h) $\vec{a} = (G.M_S / R_T^2) . \vec{n} = \vec{a}_n$; $\vec{a} = a_t . \vec{t} + a_n . \vec{n} = dv/dt . \vec{t} + v^2 / R_T . \vec{n} = (G.M_S / R_T^2) . \vec{n}$
On a donc : $dv/dt = 0$ (1) et $v^2 / R_T = G.M_S / R_T^2$ (2)
$dv/dt = 0$, la vitesse est donc constante, le mouvement de Titan est uniforme.
i) (2) $v^2 / R_T = G.M_S / R_T^2$; $v^2 = G.M_S / R_T$; $v = \sqrt{(G.M_S / R_T)}$
j) Le mouvement du satellite Encelade est circulaire et uniforme.
Le périmètre du cercle est $2\,\pi\,R_T$. $v = 2\,\pi\,R / T$; $T = 2\,\pi\,R / v$
k) $T = 2\,\pi\,R / v = 2\,\pi\,R . \sqrt{(R / G.M_S)}$; $T^2 = 4\,\pi^2\,R^3 / (G.M_S)$
$T^2 / R^3 = 4\,\pi^2 / (G.M_S)$ (c'est la 3ème loi de Kepler)
l) $R_E^3 = T_E^2 . G . M_S / 4\,\pi^2$; $R_E = \sqrt[3]{(T_E^2 . G . M_S / 4\,\pi^2)}$
$R_E = \sqrt[3]{((1{,}37 \times 24{,}0 \times 3600)^2 \times 6{,}67.10^{-11} \times 5{,}69.10^{26} / (4 \times 3{,}14^2))} = 2{,}38.10^8\ \text{m} = 2{,}38.10^5\ \text{km}$

IV) Les lois de Kepler :



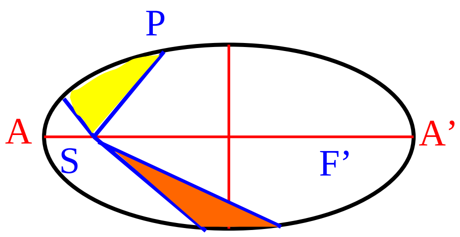
1) Notion mathématique : L'ellipse

Une ellipse est l'ensemble des points dont la somme des distances à deux points fixes (les foyers F et F') est constante :
PF + PF' = AA' = 2a   (AA' grand axe , BB' petit axe)
Un cercle est une ellipse dont les deux foyers sont confondus. AA' = BB' = D = 2 r (r : rayon du cercle) , a = r

Remarque : Pour tracer une ellipse, on peut utiliser une ficelle de longueur 2a et on en fixe les extrémités avec 2 punaises à l'emplacement des foyers. On trace l'ellipse en tendant la ficelle avec le crayon et en tournant autour des foyers.

2) Première loi de Kepler :

Dans le référentiel héliocentrique, la trajectoire du centre d'une planète est une ellipse dont le Soleil S est l'un des foyers.



3) Deuxième loi de Kepler :

Dans le référentiel héliocentrique, les aires balayées par le segment SP reliant le centre du Soleil S et celui de la planète P pendant des durées égales sont égales.
Les aires jaune et orange sont égales si elles sont balayées dans une même durée.
Si cette aire est centrée autour de A, la distance parcourue sur l'ellipse est alors la plus grande.
La vitesse en A, point le plus rapproché du Soleil est donc la plus grande..
Si cette aire est centrée autour de A', la distance parcourue sur l'ellipse est alors la plus petite.
La vitesse en A', point le plus éloigné du Soleil est donc la plus petite.

4) Troisième loi de Kepler :

Dans le référentiel héliocentrique, le rapport entre le carré de la période de révolution T d'une planète autour du soleil et le cube du demi-grand axe (a = AA'/2) de l'ellipse est constant :
T^2 / a^3 = constante   La constante ne dépend que de la masse du Soleil , elle est donc identique pour toutes les planètes du système solaire.

Cas d'une trajectoire circulaire : a = D / 2 (D : diamètre) , a = r .
3ème loi de Kepler : T^2 / r^3 = Cte

Les lois de Kepler sont valables pour les satellites de la Terre dans le référentiel géocentrique, ils ont une trajectoire circulaire dont le centre est celui de la Terre.
La constante figurant dans T^2 / a^3 = constante ne dépend alors que de la Terre.

On peut aussi appliquer ces lois aux satellites d'une autre planète.